

# トポロジカル電荷の過平滑問題の解決に向けた勾配流法の研究

## Gradient flow for solving the over-smearing problem of topological charge

渡辺展正  
慶應義塾大学

### 1. 研究目的

格子ゲージ理論は、ゲージ理論の非摂動的定式化を与える現状唯一の手法である。これを用いて強い相互作用を記述する量子色力学(QCD)の性質を探究する格子 QCD では、現実世界のハドロン質量や結合定数等を非常に高精度で説明することに成功している。ゲージ場のトポロジーは、ゲージ理論の量子的な性質に重要な役割を果たす。なかでもトポロジカル電荷と呼ばれる物理量は、トポロジーに守られて値が整数になる特別な性質を持つ。ところが格子正則化は、理論の持つトポロジカル性を損壊させてしまうため、何かしらの方法でこの性質を回復させる必要がある。時空の離散化の影響が小さいパラメータ領域での数値計算は高コストであるため、別の解決策として「ゲージ場の平滑化」処方の有効性が認知されてきた。様々な平滑化が研究されてきたが、本課題では勾配流法に注目する。この手法は、ゲージ場の配位にある種の拡散方程式に従って仮想的な時間発展(フロー)をさせることで、時空間の離散化に由来する“粗さ”の影響を取り除くものである。

理想的には、フローはトポロジカルな性質を保った処方であることが要請され、適切にフローさせた後のトポロジカル電荷はある整数に収束するべきだが、従来法に基づくフローでは“長時間”のフローでトポロジカル電荷の大きさが徐々に小さくなる「過平滑」の問題があった。さらに、フローに用いるフロー作用のパラメータの取り方によって、“長時間”フロー後の収束先が異なるという処方依存性も数値的に確認されてきた。以上の2つの問題の原因究明や解決は、ゲージ理論の量子的な性質を研究する際に不可避な研究課題であり、概念的・実用的に重要な意義を持つ。

本課題では、種々のフローによりゲージ理論のトポロジカルな性質がどう回復/崩壊するかを系統的に調査する。これにより、懸念事項であったトポロジカル電荷の過平滑問題を解決し、格子数値計算におけるトポロジカル電荷のより適切な構成法を提示する。

### 2. 研究成果の内容

#### 2-1. 勾配流法によるトポロジカル性の回復の系統的な調査

異なるフローを使った(数値)解析は、格子間隔についての高次補正項の入り方が違う格子上で演算子を解析することに相当するため、格子間隔を0にする連続極限では同じ結果を与えることが理論的に予想される。この振る舞いはトポロジカル電荷に対する過平滑問題に対しても同様であり、連続極限に近いほどトポロジカルな性質が壊れるまでにかかるフロー時間が長くなっていくと予想される。また連続理論でのトポロジカル電荷は、Atiyah-Singer 指数定理を通じて指数(Dirac 行列のゼロ固有値の数)と対応するという数学的な示唆がある。格子数値計算で得られた指数とトポロジカル電荷とを比較し、指数定理がどのレベルで成立するかをフロー作用やフロー時間ごとに調査することは、理論的にも実用的にも有意義である。

以上の課題に取り組むべく、2025年度は、SU(3)純ゲージ理論(動的クォークがないQCD)の(連続極限に近い)弱結合領域のゲージ配位のフロー解析を実施した。解析では4つの異なる格子作用を使ったフローを系統的に比較するために、各配位10,000ステップのフローとトポロジカル電荷などの物理量を測定した。格子間隔を変えた3つの配位アンサンブル(格子サイズ $12^4$ ,  $16^4$ ,  $20^4$ )に対する解析の結果、小さな格子間隔の配位ほど過平滑の問題が解消してトポロジカルな性質が安定化することが確認された。またトポロジカル電荷の整数性の破れ度合いを比較すると、DBW2フローが一番短いフロー時間で(ほぼ)整数へ収束することを確かめた。一方で格子間隔を小さくしていくと、フローによる整数性の破れ度合いの差が縮まって

いくことから、理論的な予測と整合することも確認された。加えて、複数の配位に対して、トポロジカル電荷と指数とを比較すると、DBW2フローによる結果の相関係数が97%程度になることが分かった。この結果はSU(2)配位を使った先行研究[1]の結果と一致しており、よりQCDに近いSU(3)理論でもDBW2フローが連続極限でのトポロジカルな性質を非常によく捉えていることを示唆している。

## 2-2. 格子上的t Hooft ループの実装とWilson-t Hooft 分類の数値的な検証

また応用的な研究として、Yang-Mills (YM) 理論の閉じ込め真空の調査、とりわけシータ真空におけるWilson-t Hooft 分類の数値的な検証を進めた。Wilson-t Hooft 分類ではWilson ループおよび欠陥演算子であるt Hooft ループを組み合わせて周辺則を満たすものを特定することで量子相としての閉じ込め相の区別を行うものである。今年度の研究では格子サイズ $12^3 \times 8$  および  $16^3 \times 10$  のSU(2)アンサンブルを複数生成し、それらにDBW2格子作用でフローをかける解析に本プログラムの計算資源を活用した。結果として、非自明なシータ真空に相当する $\theta=2\pi$ での計算で、t Hooft ループが面積則を示す一方で、Wilson-t Hooft ループと呼ばれる別の複合演算子が面積則を示す定性的証拠を得た。加えて $12^3 \times 8$  格子の場合には、 $\theta=4\pi$  の計算でt Hooft ループが再び周辺則を示す兆候を得た。これらはWilson-t Hooft 分類の予想を指示する結果であり、定性的には我々の格子シミュレーションで非摂動的な検証がなされたと言える。

[1] Y. Tanizaki, A. Tomiya, and H. Watanabe, Lattice gradient flows (de-)stabilizing topological sectors, JHEP 04 (2025) 12.

## 3. 学際共同利用プログラムが果たした役割と意義

課題「勾配流法によるトポロジカル性の系統的な研究」では、Dirac行列のゼロ固有値の個数を数値的に求める必要がある。具体的には、ゼロ固有値の個数がフローにともなってどのように変化するかを、複数のフローで追いかけた。また、フロー前のゼロ固有値の個数についても調査した。また配位アンサンブル全体を異なるフローで解析する系統的な比較には、手元のワークステーションのみだと一年程度かかる恐れがあったが、Miyabi-Gの計算資源を活用することで処理速度を飛躍的に向上させることができた。

課題「Wilson-t Hooft 分類の検証」では、標準的な零温度での格子数値計算に必要な配位アンサンブルの数~十数倍の配位を解析する必要があった。これは、t Hooft ループが欠陥演算子であり、1配位で1回しか測定ができない点や挿入するループ演算子のサイズを変えた複数のアンサンブルを生成する必要があったためである。現時点では対象とする格子体積が比較的小さいために、粒度の小さな計算ジョブを大量に実行する環境が望まれていた。以上の背景の下ではHPCによる計算が打開策となり、Miyabi-Cを活用した数値計算により解析が大幅に進展した。

## 4. 今後の展望

格子間隔の小さな配位アンサンブルでのトポロジー凍結問題により、理論のトポロジカルな性質から導かれる定量的な振る舞いに対する比較が困難になる。特にトポロジカル電荷のゆらぎであるトポロジカル感受率は、暗黒物質候補の質量に関連する重要な物理量であり、その精密な決定は重要な問題の一つである。ただ課題「勾配流法によるトポロジカル性の系統的な研究」で使用した $20^4$ 格子では、トポロジカル電荷の値の異なる配位があまり生成されていないことが分かっている。このトポロジー凍結問題を回避した、より物理的な配位アンサンブルに対してフローの系統的な比較を実施することが今後の目標である。問題解決のための方策として既に幾つもの提案がなされているが、本課題では文献[2]の方法が有用ではないかと睨んでいる。

課題「Wilson-t Hooft 分類の検証」の解析を進める中で、この系では(広義の)符号問題が生じてしまい、評価したいループ演算子の期待値のS/N比が非常に悪くなることが明らかとなった。そこで、この符号問題を回避・軽減する解析法を確立することが次の研究課題であ

る。それが完成した暁には、無限体積外挿を数値的な実行や非自明なシータ真空における  $\prime t$  Hooft ループの双対弦定数の評価など、より定量的な性質解明へ着手できると期待される。

[2]M. Abe, O. Morikawa, H. Suzuki, Monte Carlo Simulation of the  $SU(2)/Z_2$  Yang–Mills Theory, PTEP 2025 (2025) 6, 063B03.

## 5. 成果発表

### (1) 学術論文

Y. Tanizaki, A. Tomiya, and H. Watanabe, Lattice gradient flows (de-)stabilizing topological sectors, JHEP 04 (2025) 12.

### (2) 学会発表

森川億人, Lattice simulation of Wilson- $\prime t$  Hooft classification in  $SU(2)$  Yang-Mills theory with theta term, iTHEMS NOW&NEXT 2025, 2025, 7/24 – 25, 理化学研究所

渡辺展正,  $\prime t$  Hooft Loop in  $SU(2)$  Yang-Mills Theory Revisited, 場の理論と弦理論 2025, 2025, 7/28 – 8/1, 京都大学基礎物理学研究所

渡辺展正,  $\prime t$  Hooft Loop in  $SU(2)$  Yang-Mills Theory Revisited, 熱場の量子論とその応用2025, 2025, 9/3 – 5, 東京大学物性研究所

渡辺展正, New explorations in lattice gauge theory —  $\prime t$  Hooft loop and partial deconfinement, 離散的手法による場と時空のダイナミクス 2025, 2025, 9/8 – 12, 明治学院大学(白金キャンパス), 招待講演

渡辺展正, Lattice gradient flows (de-)stabilizing topological sectors, 「富岳」成果創出加速プログラム 超大規模格子QCDによる新物理探索と次世代計算に向けたAI技術開発 総括研究会, 2025, 9/9 – 11, ビジョンセンター田町

金森逸作, 森川億人, 永井佑紀, 谷崎佑弥, 富谷昭夫, 渡辺展正 (発表者: 富谷昭夫), Lattice gradient flows (de-)stabilizing topological sectors for  $SU(3)$ , 日本物理学会第80回年次大会 (2025年), 2025, 9/16 – 19, 広島大学(東広島キャンパス)

森川億人, 格子QCDシミュレーションによる閉じ込め相の研究, 日本学術振興会育志賞受賞者交流会, 2025, 11/28, 東京大学

渡辺展正, Lattice Gradient Flows and Their Application to the  $\prime t$  Hooft Loop, Topology in Lattice Systems 2026, 2026, 2/10 – 12, Hongo campus, University of Tokyo, 招待講演

谷崎佑弥, Wilson- $\prime t$  Hooft classification and IR behaviors of  $\prime t$  Hooft operators in 3d semiclassics and 4d lattice simulations, QFT in AdS 2026: a novel window into strong coupling dynamics, 2026, 2/16 – 28, Bernoulli Center, EPFL Lausanne, Switzerland, 招待講演

金森逸作, 森川億人, 永井佑紀, 谷崎佑弥, 富谷昭夫, 渡辺展正 (発表者: 渡辺展正),  $\prime t$  Hooft Loop in  $SU(2)$  Yang-Mills Theory Revisited, 日本物理学会2026年春季大会, 2026, 3/23 – 26, オンライン

### (3) その他

筑波大学計算科学研究センター 2025年度学際共同プログラム利用報告書

使用計算機	使用計算機に○	配分リソース※		
		当初配分	移行*	一般利用による追加
Pegasus				
Miyabi-G	○	9450	-1000	
Miyabi-C	○	1800	+1200	
※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。 *バジェット移行を行った場合、「+2000」「-1000」のように記入				