

鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型アルゴリズムの開発

Development of a hierarchical numerical algorithm for saddle point problems

多田野 寛人

筑波大学計算科学研究センター

1. 研究目的

2 行 2 列のブロック構造を有する行列を係数行列にもつ連立一次方程式：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

は鞍点型連立一次方程式と呼ばれ、偏微分方程式に対するメッシュレス離散化法、構造解析、流体計算等において出現し、高速・高精度求解が必要とされている。ここで、行列 A は正則な n 次元大規模疎行列、 B, C は $n \times m$ 長方形行列、 O は m 次零行列であり、 \mathbf{x}, \mathbf{f} は n 次元ベクトル、 \mathbf{y}, \mathbf{g} は m 次元ベクトルである。

鞍点型連立一次方程式に対する数値解法としてクリロフ部分空間反復法があるが、行列 A が良条件であったとしても行列 B, C の列数 m が大きい場合は同反復法の収束性が著しく悪化し、求解が困難な状態に陥る。我々は同方程式の反復法による求解を容易にすることを目的として、同方程式のブロック構造を利用した数値解法を構築した。本提案法の計算主要部は、行列 A と複数右辺ベクトルをもつ連立一次方程式の求解部分であるが、行列 B, C は係数行列に依存しないため、反復法による求解が比較的容易である。また、各右辺ベクトルは互いに依存関係がないため、列方向に分割することにより、複数右辺連立一次方程式は少数の右辺ベクトルをもつ複数の連立一次方程式に分割できる。これらの方程式は同時求解が可能であり、各方程式も並列求解可能であることから、本提案法は階層型の並列性を有する。

提案法で生成される鞍点型連立一次方程式の近似解精度が悪いことがあるため、本研究課題では、提案法における近似解精度の向上、及び求解高速化を行うことを目的とする。

2. 研究成果の内容

提案法で生成される近似解の精度を向上させるため、本研究では反復改良法による精度改善を行った。反復改良法では、提案法で得られた近似解を用いて残差を計算し、残差を右辺ベクトルにもつ鞍点型連立一次方程式を解くことで、近似解の補正項が求められる。この鞍点型連立一次方程式を愚直に解こうとすると多くの計算量が必要となるが、複数右辺連立一次方程式の求解で得られた解を保存し再利用することで、計算量の削減が可能となる。これにより、反復改良法で解くべき連立一次方程式は、行列 A

と 1 本の右辺ベクトルをもつ連立一次方程式のみとなる。

これまでの研究においては、鞍点型連立一次方程式の近似解を高精度に計算するため、複数右辺連立一次方程式の求解において厳しい収束条件を課していた。しかしながら、反復改良法の適用により近似解精度の向上が期待できることから、複数右辺連立一次方程式の収束条件を緩和し、反復改良による精度向上を試みた。その結果、テスト行列によっては 2~4 桁程度精度が向上したケースが確認された。また、収束条件の緩和に伴い、計算時間を短縮できることも確認できた。一方、精度改善がみられないテスト行列も存在したことから、更なる改善・改良が必要であることも認識した。

3. 学際共同利用プログラムが果たした役割と意義

学際共同利用プログラムにおいて大規模並列計算環境を利用させていただくことにより、鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法の並列計算環境に対する親和性の高さを示すことができている。これは個人所有の計算環境では不可能であり、学際共同利用は本研究を継続する上で必要不可欠であると考えられる。

4. 今後の展望

上述のとおり、一部のテスト行列に対しては反復改良法による精度改善がみられないことが確認された。現在は反復改良法を全て倍精度で行っているため、疑似 4 倍精度を適用することで精度改善が可能かどうか、検証を進めていく。

5. 成果発表

(1) 学会発表

1. Hiroto Tadano, “Performance evaluation of a hierarchical parallel solver with iterative refinement using low-accuracy solutions for saddle point problems”, JSST2025, Aomori, Japan, Sep. 2025.
2. 多田野 寛人, ”鞍点型連立一次方程式に対する反復改良付き階層並列型解法の GPU による高速化”, 日本応用数理学会 第 22 回研究部会連合発表会, 東京大学, 2026 年 3 月.

使用計算機	使用計算機に○	配分リソース*		
		当初配分	移行*	一般利用による追加
Pegasus	○	4,000		
Miyabi-G	○	13,500		
Miyabi-C				
※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。 *バジェット移行を行った場合、「+2000」「-1000」のように記入				