

鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型アルゴリズムの開発

Development of a hierarchical parallel numerical algorithm for saddle point problems

多田野 寛人

筑波大学計算科学研究センター

1. 研究目的

2 行 2 列のブロック構造を有する行列を係数行列にもつ連立一次方程式：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

は鞍点型連立一次方程式と呼ばれ、構造解析、流体計算、偏微分方程式に対するメッシュレス離散化法などにおいて現れ、高速・高精度求解が必要とされている。ここで、行列 A は正則な n 次大規模疎行列、 B, C は $n \times m$ 長方形行列、 O は m 次零行列であり、 x, f は n 次元ベクトル、 y, g は m 次元ベクトルである。同方程式をクリロフ部分空間反復法で求解する場合、行列 A が良条件であったとしても、行列 B, C の列数 m が大きい場合は収束性が悪化し、求解が困難な状態に陥る。この状況を打破するために、我々は同方程式のブロック構造を利用した数値解法を提案した。本提案法の計算主要部は、係数行列 A と複数ベクトルをもつ連立一次方程式の求解部分である。この複数右辺連立一次方程式は反復法での求解が比較的容易であり、各右辺ベクトルは互いに依存関係がないため列方向に分割できる。これにより、この連立一次方程式は同時求解可能な少数の右辺ベクトルをもつ複数の連立一次方程式に分割でき、さらに各方程式も並列に求解可能であることから、本提案法は階層型の並列性を有する。その一方で、得られる近似解の精度が悪いことがある。

本研究課題では、鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法で生成される近似解の高精度化を行うことを目的とする。

2. 研究成果の内容

上述の階層並列型解法の近似解精度を改善するために、本研究では反復改良法による精度改善を行った。反復改良法では、得られた近似解を用いて残差を計算し、残差を右辺ベクトルにもつ鞍点型連立一次方程式を解くことにより、近似解の補正項を計算する。この補正項を近似解に加えることにより精度向上を行っている。しかしながら、反復改良法において鞍点型連立一次方程式を愚直に解くことは、計算時間の増大を引き起こす。そのため本研究では、複数右辺連立一次方程式を解いて得られた解を保存し、反復改良法の計算部分に再利用することで、計算量の削減を図った。これにより、反復改良法において新たに必要になる主な計算は、行列 A と 1 本の右辺ベクトルをもつ連

立一次方程式の求解部分となった。

これまで開発してきたコードに反復改良法のコードを組み込み、性能評価を行った。その結果、反復改良を行わなかった場合と比較して、近似解精度が 2~4 桁程度向上した。また、反復改良法の反復回数は 2 回程度で十分であり、反復改良を行わない場合とほぼ同程度の計算時間で実行できることも確認した。

3. 学際共同利用プログラムが果たした役割と意義

学際共同利用プログラムにおいて大規模並列計算環境を利用させていただくことにより、鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法の並列計算環境に対する親和性の高さを示すことができている。これは個人所有の計算環境では不可能であり、学際共同利用は本研究を継続する上で必要不可欠であると考える。

4. 今後の展望

これまでは、複数右辺連立一次方程式を可能な限り高精度に解いていたが、反復改良法の導入により、粗い精度で解いても最終的には高精度近似解が得られる可能性が出てきた。これはコード全体の高速化に繋がることが期待される。また、現状は CPU のみを用いた計算であるため、GPU を利用した場合の性能評価も併せて行っていく。

5. 成果発表

(1) 学会発表

1. 多田野 寛人, “並列計算環境における鞍点型連立一次方程式に対する反復改良付き階層並列型解法の性能評価”, 日本応用数理学会 2024 年度年会, 京都大学, 2024 年 9 月.
2. Hiroto Tadano, “Performance evaluation of a hierarchical parallel solver with iterative refinement for saddle point problems in a parallel computing environment”, JSST2024 and AsiaSim2024, Hyogo, Japan, Sep. 2024.
3. 多田野 寛人, “反復改良法による鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型解法の近似解精度改善”, 日本応用数理学会 第 21 回研究部会連合発表会, 岡山大学, 2025 年 3 月.

使用計算機	使用計算機に ○	配分リソース※		
		当初配分	移行*	追加配分
Cygnus	○	2,240	0	0
Pegasus	○	2,100	0	0
Wisteria/BDEC-01	○	11,200		0
	※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。 *バジェット移行を行った場合、「+2000」「-1000」のように記入			