

鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型アルゴリズムの開発

Development of a hierarchical parallel numerical algorithm for saddle point problems

多田野 寛人

筑波大学計算科学研究センター

1. 研究目的

2 行 2 列のブロック構造を有する行列を係数行列にもつ連立一次方程式：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

は鞍点型連立一次方程式と呼ばれ、構造解析、流体計算、偏微分方程式に対するメッシュレス離散化法などにおいて出現し、高速・高精度求解が必要とされている。ここで、行列 A は正則な n 次大規模疎行列、 B, C は $n \times m$ 長方形行列、 O は m 次零行列であり、 x, f は n 次元ベクトル、 y, g は m 次元ベクトルである。同方程式をクリロフ部分空間反復法で求解する場合、行列 A が良条件であったとしても、行列 B, C の列数 m が大きい場合は同法の収束性が悪化し、求解が困難な状況に陥る。この状況を打破するために、我々は同方程式のブロック構造を利用した数値解法を提案した。本提案法の計算主要部は、反復法での求解が比較的容易な、複数右辺ベクトルを有する連立一次方程式の求解部分である。これらの複数右辺ベクトルは互いに依存関係がないことから列方向に分割でき、これにより少数の右辺ベクトルをもつ複数の連立一次方程式に分けられる。これらの連立一次方程式は同時求解が可能で、さらに分割された各々の連立一次方程式も並列に求解可能であることから、本提案法は階層型の並列性を有する。

本研究課題では、鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型解法の並列実装を行うとともに、その高度化、高性能化を図ることを目的とする。

2. 研究成果の内容

上述の通り、鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法の計算主要部は、複数右辺ベクトルをもつ連立一次方程式である。複数右辺連立一次方程式に対する有力な反復法として、ブロッククリロフ部分空間反復法がある。同反復法は、右辺ベクトル数の増加に伴い求解に要する反復回数が減少する傾向にある一方で、得られる近似解の精度が劣化することがある。ブロッククリロフ部分空間反復法の 1 つである Block GPBiCGrQ 法もこの特長を有する。我々は、同法の近似解精度劣化を回避するために、Group-wise 更新と呼ばれる手法を用いることで近似解精度の高精度化を図った Block GWGPBiCGrQ 法を開発した。本開発手法では、漸化式の更新量をグループ化し近似解精度劣化を引き起こす計算を回避することで、近似解の高精度化を達成している。

2023 年度は Block GWGPBiCGrQ 法の GPU 版コードを開発し、これまでの学際共同利用プログラムにおいて開発していた鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法の並列コードに組み込み、性能評価を行った。その結果、Block GPBiCGrQ 法を適用した場合と比較して、Block GWGPBiCGrQ 法を適用した場合は、鞍点型連立一次方程式の近似解が高い精度で得られることを確認した。また、両手法を適用した場合の計算時間は、ほぼ同等であることも確認した。

3. 学際共同利用プログラムが果たした役割と意義

学際共同利用プログラムにおいて大規模並列計算環境を利用させていただくことにより、鞍点型連立一次方程式の階層並列型解法の並列計算環境に対する親和性の高さを示すことができている。これは個人所有の計算環境では不可能であり、学際共同利用は本研究を継続する上で必要不可欠であると考ええる。

4. 今後の展望

今後は鞍点型連立一次方程式の解の精度を更に向上させるため、解法内で行っている行列・行列積計算を高精度に行い、並列計算環境における性能を数理・高性能計算の両側面で検証を行う。

5. 成果発表

(1) 学術論文

1. Hiroto Tadano, “Implementation and performance evaluation of a hierarchical parallel solver for saddle point problems on a GPU cluster”, *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering*, Vol. 10, No. 1, pp. 116—131, 2023.
2. Hiroto Tadano, “Development and performance evaluation of the Block-product type iterative methods with the variable grouping strategy”, *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 32—53, 2024.

(2) 学会発表

1. Hiroto Tadano, “Development and performance evaluation of the Block GPBiCGrQ method with variable grouping strategy”, The 42nd JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST2023), Niigata, Japan, Aug. 2023.
2. Yuki Shimada, Yuya Kobari, Soichiro Ikuno, “Parallelization of MEMD and Application to Electromagnetic Wave Propagation Analysis”, 21st

International Symposium on Applied Electromagnetics and Mechanics (ISEM2023), Tokyo, Japan, Nov. 2023.

3. 多田野 寛人, “鞍点型連立一次方程式に対する漸化式動的グループ化反復法の適用と性能評価”, 日本応用数学会 第 20 回研究部会連合発表会, 長岡技術科学大学, 2024 年 3 月.

使用計算機	使用計算機に ○	配分リソース※		
		当初配分	移行*	追加配分
Cygnus	○	3000	0	0
Pegasus	○	3000	0	0
Wisteria/BDEC-01	○	20000	0	0
※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。 *バジェット移行を行った場合、「+2000」「-1000」のように記入				