

## 鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型アルゴリズムの開発

### Development of a hierarchical parallel numerical algorithm for saddle point problems

多田野 寛人

筑波大学計算科学研究センター

#### 1. 研究目的

鞍点型と呼ばれる連立一次方程式は、2 行 2 列のブロック構造を有する係数行列をもつ連立一次方程式：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

であり、構造解析、流体計算、及び偏微分方程式に対するメッシュレス離散化法などにおいて現れ、その求解には多くの計算時間を必要とする。ここで、 $A$  は正則な  $n$  次大規模疎行列、 $B, C$  は  $n \times m$  長方形行列、 $O$  は  $m$  次零行列であり、 $\mathbf{x}, \mathbf{f}$  は  $n$  次元ベクトル、 $\mathbf{y}, \mathbf{g}$  は  $m$  次元ベクトルである。同方程式の問題サイズが大規模である場合は、クリロフ部分空間反復法による求解を余儀なくされる。しかしながら、行列  $B, C$  の列数  $m$  が多い場合は、同反復法での求解に多くの反復回数を要したり、解が得られないことがある。

我々は鞍点型連立一次方程式のブロック構造を利用した数値解法（以下、提案法）を提案した。提案法の計算主要部は、行列  $A$  と複数の右辺ベクトルをもつ連立一次方程式の求解である。各右辺ベクトル間には互いに依存関係がないため分割が可能であり、これにより少数の右辺ベクトルをもつ複数の連立一次方程式に分割できる。これらは同時求解が可能であり、各連立一次方程式も並列求解が可能であることから、提案法は階層型の並列性をもつ。2021 年度の学際共同利用では、提案法の並列計算コードを開発し、その性能を評価した。2022 年度は同並列コードの更なる高速化を目指し、GPU を用いた実装、及びその性能評価を行うことを目的とする。

#### 2. 研究成果の内容

2022 年度は鞍点型連立一次方程式に対する提案法の並列計算コードの GPU 化、及び性能評価を実施した。Cygnus は計算ノードあたり 4 基の GPU を搭載していることから、各計算ノードに MPI プロセスを 4 つ立ち上げ、各 MPI プロセスに 1 基の GPU を割り当てるように実装を行った。分割された各々の複数右辺連立一次方程式は各 GPU において求解した。求解にはブロッククリロフ部分空間反復法の 1 つである Block GwBiCGSTABrQ 法を用いた。同法の計算カーネルは、1) 疎行列・密行列積、2) 密行列・密行列積、及び 3) 密行列をもつ小規模連立一次方程式の求解である。これらの計

算には NVIDIA CUDA ライブラリとして提供されている cuSPARSE, cuBLAS, 及び cuSOLVER を適用した. 性能評価は Cygnus の最大 56 ノードを用いて実施し, GPU の利用により十分な高速化が達成されていることを確認した.

### 3. 学際共同利用プログラムが果たした役割と意義

学際共同利用で並列計算環境を利用させていただくことにより, 本研究課題の提案手法の並列計算環境での有効性, 及び GPU による高速化が可能であることを示すことができた. これは個人で所有する計算環境では実行不可能であり, 学際共同利用は研究を継続する上でなくてはならないものとする.

### 4. 今後の展望

今後はこれまで開発した並列計算コードを改良し, 複数右辺連立一次方程式の右辺項を 2 次元分割することで並列度を上げ, 更なる高性能化を図っていきたい.

### 5. 成果発表

#### (1) 学術論文

1. Shota Ishikawa, Hiroto Tadano, and Ayumu Saitoh, “Application and performance evaluation of a method using block structures for saddle point problems appearing in image reconstruction problems”, JSIAM Letters, Vol. 14, pp. 115—118, 2022.

#### (2) 学会発表

1. Hiroto Tadano, “Implementation of a hierarchical parallel solver for saddle point problems on a GPU cluster”, The 41<sup>st</sup> JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST 2022), Virtual Conference, Sep. 2022.
2. 多田野 寛人, “GPU クラスタにおける鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型解法の実装と性能評価”, 日本応用数理学会 2022 年度年会, オンライン, 2022 年 9 月.
3. 多田野 寛人, “鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型数値解法の GPU による高速化”, 【非線形問題の高性能解法と可視化技術に関する研究会】2022 年度第 1 回研究会, 日本大学津田沼キャンパス, 2023 年 3 月.

筑波大学計算科学研究センター 2022年度学際共同プログラム利用報告書

使用計算機	使用計算機に ○	配分リソース※	
		当初配分	追加配分
Cygnus	○	2,700	0
Wisteria/BDEC-01	○	16,200	0
※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。			