鞍点型連立一次方程式に対する階層並列型アルゴリズムの開発

Development of a hierarchical parallel numerical algorithm for saddle point problems

多田野 寛人

筑波大学計算科学研究センター

1. 研究目的

鞍点型と呼ばれる連立一次方程式は、2 行 2 列のブロック構造の係数行列をもつ連立一次方程式であり、偏微分方程式の初期値・境界値問題に対するメッシュレス離散化法や構造解析、流体解析などの分野で現れ、その求解に多くの計算時間を要する。同方程式に対してクリロフ部分空間反復法を適用すると、一般的に残差の収束性が極めて悪く、求解に多くの反復回数を要したり解が得られないことがある。

我々はこの欠点を回避するために、同方程式のブロック構造を利用した求解手法（以下、提案法）を構築した。提案法では鞍点型連立一次方程式を直接解くのではなく、複数右辺ベクトルをもつ連立一次方程式の求解を経由して鞍点型連立一次方程式の解を求める。この複数右辺連立一次方程式は一般的に元の鞍点型連立一次方程式よりも反復法による求解が容易である。また、各右辺ベクトルは互いに独立であるため、これらを分割して解くことで並列求解ができ、分割された各連立一次方程式の求解においても並列求解が可能であるため、提案法は階層型の並列性をもつ。

本研究課題では、提案法の並列計算環境における有効性を示すため、並列コード実装、及び性能評価を行う。また、提案法の実アプリケーションへの有効性検証と、反復法で必要となる前処理法に関する性能評価も併せて目的とする。

2. 研究成果の内容

2021 年度は、(1) 提案法の並列コード実装と複数ノードを用いた性能評価、(2) 3 次元画像再構成問題に対する提案法の適用と性能評価、(3) 近似逆行列分解・不完全分解前処理を用いた反復法の性能評価を実施した。

(1) については、提案法で現れる複数右辺連立一次方程式を MPI を用いて複数の小問題に分割し、分割された各小問題は OpenMP を用いて並列求解を行うコードを開発した。Cygnus の最大 32 ノードを用いて開発コードの性能評価を行い、十分な並列化効率が達成されていることを確認した。

(2) については、3 次元画像再構成問題で現れる鞍点型連立一次方程式に対して提案法を適用し、OpenMP を用いて並列化したコードを Cygnus の 1 ノードを用いて性能評価を行った。その結果、鞍点型連立一次方程式をそのまま求解するよりも、提案

法を適用した方が高速，かつ高精度に求解が可能であることを確認した。

(3) については，近似逆行列前処理，及び不完全分解前処理法について並列計算環境に適した計算法を構築し，OpenMP を用いて並列化したコードを Cygnus の 1 ノードを用いて性能評価を行った。その結果，構築した手法は従来法に対して高い速度向上率を示すことが確認された。

3. 学際共同利用が果たした役割と意義

学際共同利用で並列計算環境を利用させていただくことにより，提案法，及び関連技術に関する並列計算環境での有効性を示すことができた。これは個人で所有する環境では実行不可能であり，学際共同利用は研究を継続する上でなくてはならないものとする。

4. 今後の展望

2021 年度は CPU のみを用いて性能評価を行ったが，今後は OpenACC, 及び CUDA ライブラリを活用して GPU も利用した性能評価を行い，コードの更なる高速化・高度化を推進していく予定である。

5. 成果発表

(1) 学術論文

1. Shota Ishikawa, Hiroto Tadano and Ayumu Saitoh, “Application and performance evaluation of a method using block structure for saddle point problems appearing in image reconstruction problems”, JSIAM Letters (accepted).

(2) 学会発表

1. Hiroto Tadano, “Parallel implementation of the approach for solving saddle point problems using block structure”, The 40th JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST 2021), Virtual Conference, Sep. 2021.
2. Taiga Yamashita, Taku Itoh and Hiroto Tadano, “A parallelization strategy for incomplete decomposition-based preconditioning for solving linear systems”, The 40th JSST Annual International Conference on Simulation Technology (JSST 2021), Virtual Conference, Sep. 2021.
3. 多田野 寛人, 倉本 亮世, Group-wise 更新による Block GPBiCG 法の近似解精度改善, 日本応用数理学会 2021 年度年会, オンライン, 2021 年 9 月.
4. 石川 翔大, 多田野 寛人, 齋藤 歩, 画像再構成問題で現れる鞍点型連立一次方程式に対するブロック構造を利用した前処理の適用と性能評価, 日本応用

数理学会 2021 年度年会, オンライン, 2021 年 9 月.

使用計算機	使用計算機 に○	配分リソース*	
		当初配分	追加配分
Cygnus	○	2430	0
Oakforest-PACS			

※配分リソースについてはノード時間積をご記入ください。